MA2115 Clase 1: Sucesiones Infinitas

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

1 Definición de sucesión

Denotamos al conjunto de los números enteros positivos (o números naturales) usando el símbolo $\mathbb{N}$ y al conjunto de los números reales mediante $\mathbb{R}$.

Definicion 1 *Definimos una* sucesión infinita *como una función a valores reales cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos* $\mathbb{N}$.

Observemos que es posible definir una sucesión con valores en cualquier conjunto, no necesariamente $\mathbb{R}$. Más adelante en el curso consideraremos también sucesiones de funciones polinómicas.

Una sucesión puede ser denotada de varias maneras:

1. Como una función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$;
2. Como un arreglo ordenado de la forma $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, donde el término general a_n es igual a $f(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$;
3. Usando la notación descriptiva de conjuntos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ o simplemente $\{a_n\}$.

En la práctica, las sucesiónes que generalmente consideramos son de la forma $\{a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2}\ldots\}$, es decir, el conjunto de índices es de la forma $\{n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq k\}$, y no todo $\mathbb{N}$. Sin embargo, los resultados acerca de las sucesiones que discutiremos en esta clase se aplican sin modificaciones significativas a este tipo de funciones que también podemos considerar sucesiones (aunque no estén incluidas en nuestra definición).

Ejemplo 1

1. $a_n = \dfrac{1}{n}$, *para* $n \geq 1$*:* $\quad 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$
2. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, *para* $n \geq 1$*:* $\quad 1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{4}}, \ldots$
3. $a_n = n^2 - 1$, *para* $n \geq 0$*:* $\quad -1, 0, 3, 7, \ldots$
4. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, *para* $n \geq 1$*:* $\quad \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots$
5. $a_n = 3 + (-1)^n$, *para* $n \geq 1$*:* $\quad 2, 4, 2, 4, \ldots$

6. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n - 1}$, *para* $n \geq 1$*:* $\quad 1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{7}, \dfrac{16}{15}, \ldots$

7. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{2n-1}$, *para* $n \geq 1$*:* $\quad -1, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{7}, \ldots$

En lo que resta de esta clase, cuando nos refiramos a sucesiones estaremos hablando de sucesiones a valores reales.

Conociendo los primeros términos de la sucesión no podemos garantizar que conocemos la sucesión, ya que dos sucesiones pueden tener los mismos primeros términos y ser diferentes. Por ejemplo, los primeros tres téminos de la sucesión $a_n = \left[\dfrac{2^n}{n}\right]$ son iguales a 2, pero la sucesión no es constante. De hecho, para cada $m \geq 1$, es posible conseguir fórmulas explícitas de pares de sucesiones que coincidan en los primeros m términos y no sean iguales.

Sin embargo, cuando sabemos además que la sucesión es una progresión aritmética, es posible obtener el término n-ésimo de la sucesión si conocemos unos términos. Por ejemplo, la sucesión $1, 3, 5, 7, \ldots$ de los números impares tiene término general $a_n = 2n - 1$. así mismo, si la sucesión $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ es una progresión aritmética, el término n-ésimo es igual a $a_n = 3n - 2$, para $n \geq 1$.

Otra forma de determinar completamente una sucesión es mediante una *fórmula de recurrencia*:

Definicion 2 *Decimos que la sucesión* $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ *está definida en* forma recurrente *si, dado el valor* a_{n_0}*,* $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ *es la única sucesión que satisface una ecuación de la forma*

$$F_n(a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots, a_{n-1}) = a_n, \tag{1}$$

donde F_n *es alguna sucesión de funciones dada. En este caso, decimos que la ecuación* (1) *es* la fórmula de recurrencia *de* $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$.

Por ejemplo, la progresión aritmetica $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ puede ser descrita mediante la fórmula de recurrencia

$$a_n = a_{n-1} + 3, \quad n \geq 2,\ a_1 = 1.$$

2 Límites de sucesiones

Definicion 3 *Si, para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $M > 0$ *tal que* $|a_n - L| < \varepsilon$*, siempre que* $n > N$*, entonces decimos que el límite de la sucesión* $\{a_n\}$ *es* L *y escribimos* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Definicion 4 *Si una sucesión tiene un límite finito entonces se dice que es* convergente. *En otro caso, se dice que es* divergente.

Por ejemplo, si graficamos los primeros términos de la sucesión $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$, tenemos $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{11}, \ldots$, podemos observar que dichos puntos se acercan a $\dfrac{1}{2}$.

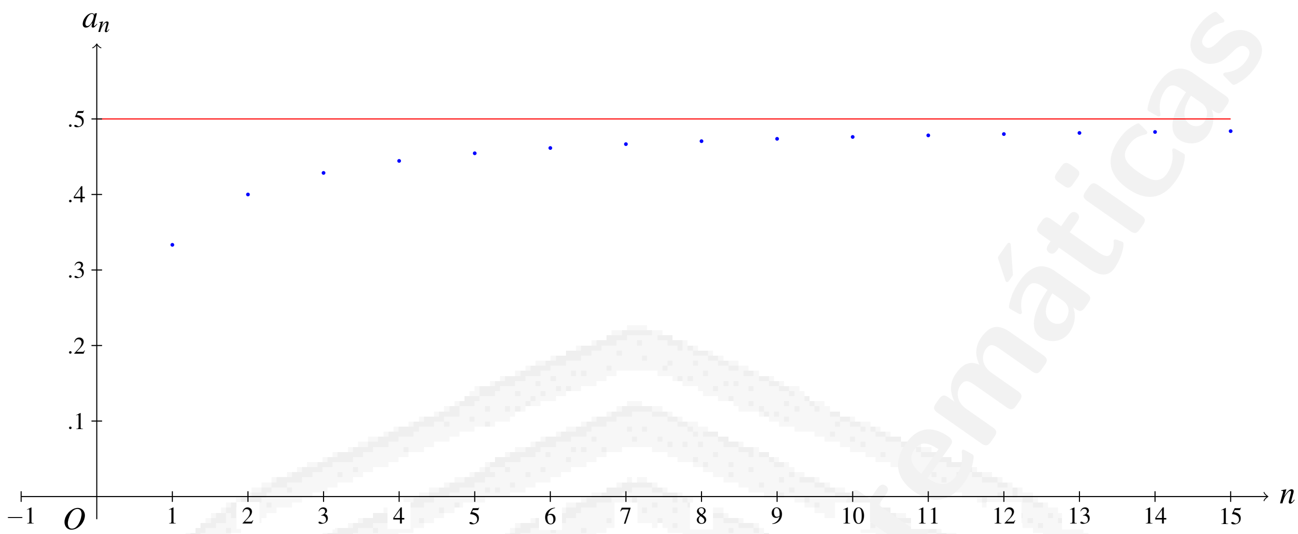

Figura 1: Gráfica de la sucesión $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ con $1 \leq n \leq 15$.

Ejemplo 2

1. $\left\{ \dfrac{n}{2n+1} \right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.
2. $\left\{ (-1)^n \dfrac{n+1}{n} \right\}$, *diverge:* $(-1)^n \dfrac{n+1}{n} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impar,} \\ -1 - \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ par.} \end{cases}$
3. *Si* $a_n = \dfrac{1}{2^n}$*, para cada* $n \geq 1$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
4. *Si* $a_n = 3^n + (-3)^n$*, para cada* $n \geq 1$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *no existe, con lo cual* (a_n) *diverge.*
5. *Si* $a_n = n - 1$*, para cada* $n \geq 1$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$*, con lo cual* (a_n) *diverge.*

Ejemplo 3 *Hallar el n-ésimo término de la sucesión cuyos primeros téminos son:*

$$-\frac{2}{1}, \frac{8}{2}, -\frac{26}{6}, \frac{80}{24}, -\frac{242}{120}, \ldots,$$

y decidir si converge o no.

Solución: Ordenamos los términos de la sucesión:
Numerador: Observemos que

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 8 & 26 & 80 & 242 & \cdots \\ 3-1 & 3^2-1 & 3^3-1 & 3^4-1 & 3^5-1 & \cdots \end{array}$$

de donde es claro que el numerador es de la forma $3^n - 1$.
Denominador: Observemos que

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 6 & 24 & 120 & \cdots \\ 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 2\cdot 3 & 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 & 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 & \cdots \end{array}$$

de donde es claro que el denominador es de la forma $n!$.

En suma, el término general de la sucesión es $a_n = (-1)^n \dfrac{3^n - 1}{n!}$ y, como $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n-1}{n!} = 0$, tenemos que (a_n) converge.

Ejemplo 4 *Demostrar, usando la definición de límite, que* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Solución: Debemos demostrar que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $N > 0$ tal que

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n > N.$$

En efecto, como $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \dfrac{1}{4n+2}$, para todo $n > 0$, basta con encontrar un $N > 0$ tal que $\dfrac{1}{4n+2} < \varepsilon$, para todo $n > N$, pero

$$\frac{1}{4n+2} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 4n+2 \Longleftrightarrow \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} < n,$$

de donde $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$ siempre que $n > N := \dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$.

Ejemplo 5 *Demuestre en cada caso, usando la definición de límite, que L es el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:*

1. $a_n = \dfrac{1}{n^3}$ *y* $L = 0$;
2. $a_n = \dfrac{4n}{2n-1}$ *y* $L = 2$;
3. $a_n = \dfrac{e^n + 1}{e^n}$ *y* $L = 1$;
4. $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ *y* $L = 1$;

Solución: 1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\dfrac{1}{n^3} = \left|\dfrac{1}{n^3} - 0\right| < \varepsilon$ siempre que $n > N$. Pero $\dfrac{1}{n^3} < \varepsilon \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} < n^3 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} < n$, de modo que podemos considerar $N := \dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$.

2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n}{2n-1} = 2$ si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\left|\dfrac{4n}{2n-1} - 2\right| < \varepsilon$ siempre que $n > N$. Pero, para n un entero positivo tenemos que $2n - 1 > 0$ y, así,

$$\left|\frac{4n}{2n-1} - 2\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{2}{2n-1} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon} < n,$$

de modo que podemos considerar $N := \dfrac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n+1}{e^n} = 1$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\left|\dfrac{e^n+1}{e^n} - 1\right| < \varepsilon$ siempre que $n > N$. Como

$$\left|\frac{e^n+1}{e^n} - 1\right| = \left|\frac{e^n+1-e^n}{e^n}\right| = \frac{1}{e^n} < \varepsilon$$

y la última desigualdad dse cumple si, y sólo si, $n > -\ln\varepsilon = N$, podemos elegir $N = -\ln\varepsilon$. Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n+1}{e^n} = 1$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = 1$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\left|1 + \dfrac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ siempre que $n > N$. Pero es claro que, para cada $\varepsilon > 0$, el valor $N = \frac{1}{\varepsilon}$ siempre satisface esta condición. $\square$

Teorema 1 *Sea $f\colon Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alguna función y $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Si el límite $L = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, entonces, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ contenida en $Dom(f)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ existe, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existe y es igual a L. Recíprocamente, si existe L tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existe y es igual a L, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset Dom(f)$ para la cual $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe y es igual a L.*

Demostración: Como $L = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ tenemos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $|x - x_0| < \varepsilon$. Por otra parte, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, para cada $\delta > 0$, existe $N > 0$ tal que $|x_n - x_0| < \delta$ siempre que $n > N$, pero entonces también tenemos que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ siempre que $n > N$, es decir $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Recíprocamente, supongamos que $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, para cada sucesión $(x_n) \subset \mathrm{Dom}(f)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Si no se cumple que $L = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, existe $x_\delta \in \mathrm{Dom}(f)$ para el cual $|x_\delta - x_0| < \delta$ y $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon$. Por lo tanto, para cada entero positivo n, podemos elegir $x'_n := x_{1/n} \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $|f(x'_n) - L| \geq \varepsilon$ mientras que $|x'_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$, pero esto nos dice que la sucesión (x'_n) satisface $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \neq L$ (es decir, o bien el límite no existe ó bien existe y es distinto de L). Esta contradicción viene de suponer que no se cumple $L = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. $\square$

Por ejemplo, es trivial que $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, y sabemos que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$ para cualquier real positivo p. Por lo tanto, el Teorema 1 nos dice que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

El Teorema 1 también es útil para demostrar que ciertos límites de funciones reales no existen. Por ejemplo, sabemos que $\mathrm{sen}(\pi n) = 0$ y $\mathrm{sen}\,\pi\left(2n + \dfrac{1}{2}\right) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual, en particular, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{sen}(\pi n) = 0$, mientras que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{sen}\,\pi\left(2n + \dfrac{1}{2}\right) = 1$. Como dichos límites no coinciden, el Teorema 1 nos dice que $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{sen}(\pi x)$ no existe.

Corolario 1 *Sea r un número real cualquiera. Entonces, la sucesión* $(r^n)_{n=1}^{\infty}$ *converge siempre que* $|r| < 1$.

Ejemplo 6 *Determine la convergencia o divergencia de las sucesiones siguientes:*

1. $a_n = \dfrac{3n^2}{7n^2+1}$;
2. $a_n = n \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}$;
3. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$;

Solución:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{7n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{7+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{3}{7}$, ya que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{7+x}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi$, ya que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} = \pi$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
3. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = e^2$, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$.

□

3 Propiedades de los límites de sucesiones

Teorema 2 *Para cualquier sucesión* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, *tenemos que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *si, y sólo si,* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Demostración: En virtud de la definición de límite, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $||a_n| - 0| = |a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$ siempre que $n > N$, esto es, si, si y sólo si, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Teorema 3 *Sean* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones convergentes y K una constante arbitraria. Entonces,*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} K = K$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} Ka_n = K \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

El siguiente teorema es la versión para sucesiones del conocido teorema del emparedado.

Teorema 4 *Supongamos que* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *son sucesiones para las cuales*

a) *existe un* $k > 0$ *tal que* $a_n \leq b_n \leq c_n$, *y*

b) *las sucesiones* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergen y* $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *y* $\lim_{n\to\infty} c_n$.

Entonces, la sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge y* $L = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Corolario 2 *Sean* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *sucesiones tales que existe* $k > 0$ *para el cual* $|b_n| \leq a_n$, *para cada* $n > k$. *Entonces,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *siempre que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostración: Como $|b_n| \leq a_n$, tenemos que $-a_n \leq b_n \leq a_n$, y podemos usar el teorema del emparedado (observe que $\lim\limits_{n\to\infty} -a_n = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) para concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. □

Ejemplo 7 *Demuestre que la sucesión* $\left\{(-1)^n \dfrac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *converge y encuentre su límite.*

Solución: Observemos que, para todo $n \leq 2$, tenemos que $n! \geq 2^{n-1}$, con lo cual $0 < \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$. □

4 Sucesiones monótonas

Definicion 5 *Decimos que una sucesión* $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ *es*

a) *creciente (no-decreciente) si, para cada* $n \geq k$, $a_n < a_{n+1}$ $(a_n \leq a_{n+1})$,

b) *decrciente (no-creciente) si , para cada* $n \geq k$, $a_n < a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$, *y*

c) *monótona si es no-decreciente o no-creciente.*

Es claro entonces que $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ es creciente (no-decreciente) si, y sólo si, $(-a_n)_{n=k}^{\infty}$ es decreciente (no-creciente).

Ejemplo 8 *La sucesión* $\{3n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 6, 9, \ldots\}$ *es creciente, la sucesión* $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \ldots\right\}$ *es decreciente, la sucesión* $\left\{\left[\dfrac{n}{2}\right]\right\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots\}$ *es no-decreciente pero no creciente, todas las sucesiones anteriores son monotonas, y un ejemplo de sucesión que no es monótona está dado por* $\{3 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 2, 4, \ldots\}$.

Ejemplo 9 *Demostrar que la sucesión* $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}_{n=3}^{\infty}$ *es decreciente.*

Demostración: Queremos ver que, $\dfrac{n^2}{2^n} > \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$, para cada $n \geq 3$. Para esto, observemos, por una parte, que

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2^n} > \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{n+1}n^2 > 2^n(n+1)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2n^2 > n^2+2n+1 \\ &\Longleftrightarrow \quad n^2-2n > 1 \Longleftrightarrow n(n-2) > 1 \end{aligned}$$

y, por otra parte, que $n(n-1) > 1$, para cada $n \geq 3$. □

Definicion 6 *Una sucesión $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ es acotada si existe un $D > 0$ tal que $|a_n| \leq D$, para todo $n \geq k$. Si existe un número real M tal que $a_n \leq M$, para todo $n \geq k$, decimos que $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ es acotada superiormente y que M es una cota superior de $(a_n)_{n=k}^{\infty}$. Si existe un número real m tal que $a_n \geq m$, para todo $n \geq k$, decimos que $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ es acotada inferiormente y que m es una cota inferior de $(a_n)_{n=k}^{\infty}$.*

Proposicion 1 **a)** *Toda sucesión no-decreciente y acotada superiormente es convergente.*

b) *Toda sucesión no-creciente y acotada inferiormente es convergente.*

c) *En particular, toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

Demostración: **a)** Sea $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ una sucesión no-decreciente y acotada superiormente. Recordemos que todo conjunto de números reales que es ambos acotado y no vacío, tiene una cota superior m´ inima. Sea L dicha cota superior mínima. Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, el valor real $L-\varepsilon$ no es una cota superior de la sucesión (a_n), con lo cual existe un entero $n_0 \geq k$ tal que $a_{n_0} > L-\varepsilon$. Por otra parte, como la sucesión es no-decreciente, $a_{n_0} \leq a_n$, para cada $n \geq n_0$, y, por lo tanto,

$$L-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq L < L+\varepsilon,$$

para cada $n \geq n_0$. En particular, $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$, para cada $n \geq n_0$, lo cual es equivalente a que $|a_n - L| < \varepsilon$, para cada $n \geq n_0$. Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

b) Si $(b_n)_{n=k}^{\infty}$ es no-creciente y acotada inferiormente, entonces $(-b_n)_{n=k}^{\infty}$ es no-decreciente y acotada superiormente, lo cual en virtud de **a)** nos dice que $(-b_n)$, y por lo tanto (b_n), es convergente.

c) Por último, es claro que si $(a_n)_{n=k}^{\infty}$ es una sucesión acotada, entonces es ambas acotada superior e inferiormente, de modo que es convergente siempre que sea monótona. □

Ejemplo 10 *Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.*

Solución: Por una parte,

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^n(n+1)! \geq 2^{n+1}n! \\ &\Longleftrightarrow \quad n+1 \geq 2 \Longleftrightarrow n \geq 1, \end{aligned}$$

con lo cual tenemos que $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es no-creciente y, por otra parte, los términos de la sucesión son todos positivos, con lo cual 0 es una cota inferior. En suma, $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no-decreciente acotada inferiormente y, por lo tanto, convergente. □

Ejemplo 11 *Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *la sucesión definida en forma recurrente mediante las ecuaciones* $a_1 = 1$, *y* $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. *Demuestre que dicha sucesión converge a* 2.

Solución: Veamos primero, usando el método de inducción, que, para cada $n \geq 1$, $0 < a_n < a_{n+1} < 2$. En efecto, para $n = 1$, es claro que $0 < 1 = a_1 < \sqrt{2} = a_2 < 2$. Supongamos que $0 < a_n < a_{n+1} < 2$ se cumple para algún $n \geq 1$. Queremos ver que $0 < a_{n+1} < a_{n+2} < 2$ o, equivalentemente, usando la fórmula de recurrencia, que $0 < \sqrt{2a_n} < \sqrt{2a_{n+1}} < 2$. Pero esta última desigualdad se obtiene al multilplicar por 2 y luego extraer la raíz cuadrada en cada miembro de la desigualdad $0 < a_n < a_{n+1} < 2$. En virtud del principio de inducción, tenemos que $0 < a_n < a_{n+1} < 2$, para cada $n \geq 1$. En particular, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada y, en consecuencia, convergente. Sea $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ahora usando las propiedades de límite y la relación $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, tenemos que

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2a},$$

es decir, $a = \sqrt{2a} \Longleftrightarrow a^2 = 2a \Longleftrightarrow a(a-2) = 0$ y, así, $a = 0$ ó $a = 2$. Más aún, a no puede ser 0 ya que $a > a_1 = 1$, y, en consecuencia, $a = 2$. $\square$

Correcciones y gráficos: Boris Iskra

May 13, 2008